Ejercicios diversos

1. Justifíquese que no puede existir una función $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tal que para todo w con $|w| = 1$ se tenga $\lim\limits_{z\to w} f(z) = \infty$.

2. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y verificando que $|f(z^2)| \geqslant |f(z)|$ para todo $z \in D(0,1)$. Pruébese que f es constante.

3. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y supongamos que para cada $z \in \mathbb{C}$ hay alguna derivada de f que se anula en z. Pruébese que f es una función polinómica.

4. ¿Verdadero o falso?

   a) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\operatorname{Re}(f)$ está acotada entonces f es constante.

   b) Si $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y $\operatorname{Re}(f)$ está acotada entonces f está acotada.

5. Descríbanse las funciones f que cumplen las siguientes condiciones:

   a) $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$

   b) $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$

   c) $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \infty$.

6. Dados $a > 0$ y $-1 < \alpha < 1$, calcúlense las integrales:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x+a)^2}\,dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x^2+a)}\,dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{e^{2x}-1}\,dx$$

7. Integrando la función $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2+a^2)}$ sobre la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, siendo $0 < \varepsilon < a < R$, calcúlese la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x((x^2+a^2)}\,dx$$

8. Integrando la función $f(z) = \dfrac{1-e^{2iz}}{z^2(z^2+a^2)}$ sobre la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, siendo $0 < \varepsilon < a < R$, calcúlese la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2((x^2+a^2)}\,dx$$

9. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tal que $|f(z)| \leqslant 1$ para todo $z \in D(0,1)$. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ceros de f en $D(0,1)$. Pruébese que:

$$|f(z)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k} z} \right| \quad (z \in D(0,1))$$

10. Hallar una transformación de Möbius que deja invariante la circunferencia centrada en el origen de radio ρ y tiene como único punto fijo el punto $z = \rho$.

11. Encontrar todas las funciones holomorfas del semiplano superior cuyo módulo es menor o igual que 1, llevan el punto i al 0 y el módulo de su derivada en el punto i es igual a $1/2$.

12. Sea $f : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{C}$ una función meromorfa no constante en el disco $D(0,1)$, continua en $\overline{D(0,1)} \setminus \mathcal{P}$, donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de los polos de f, y tal que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Descríbase cómo es f.

13. Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ y b puntos del disco $D(0,1)$. Pruébese que la ecuación

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z} = b$$

tiene n soluciones en $D(0,1)$.

14. Hágase uso del principio generalizado del argumento para calcular la suma S_p de las potencias p-ésimas de los ceros de un polinomio P.

Sugerencia:

$$S_p = \int_{C(0,R)} z^p \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz$$

15. Construir un isomorfismo conforme, f, del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| < \pi/6\}$ sobre el disco $D(0,1)$ verificando que $f(1) = 0$ y $f(2) = 7/9$. Pruébese que f es único.

16. Integrando la función $f(z) = \dfrac{z^{1/2} \log z}{1 + z^4}$ a lo largo de la frontera del conjunto

$$\{z \in \mathbb{C}^* : \varepsilon < |z| < R, 0 < \arg(z) < \pi/2\}, \quad (0 < \varepsilon < 1 < R)$$

calcular las integrales:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \log x}{1 + x^4}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^4}\, dx$$

17. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones enteras uniformemente acotada en conjuntos compactos. Supongamos que para cada $k = 0, 1, 2, ..$ existe el límite

$$\lim_{n \to \infty} f_n^{(k}(0) = c_k \in \mathbb{C}$$

Justifíquese que la serie $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{c_n}{n!} z^n$ es convergente en $\mathbb{C}$, y que la sucesión $\{f_n\}$ converge a $f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} \dfrac{c_n}{n!} z^n$ uniformemente en conjuntos compactos.

18. Sea Ω un dominio simplemente conexo, $\mathcal{S}$ un conjunto de puntos aislados en Ω y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \mathcal{S})$. Justifíquese que f tiene una primitiva en $\Omega \setminus \mathcal{S}$ si, y sólo si, $\operatorname{Res}(f(z), w) = 0$ para todo $w \in \mathcal{S}$.